الرياضيات

4

التحليل (5)

السنة الثالثة

الفصل الثاني

الدكتور نايف طلي

5

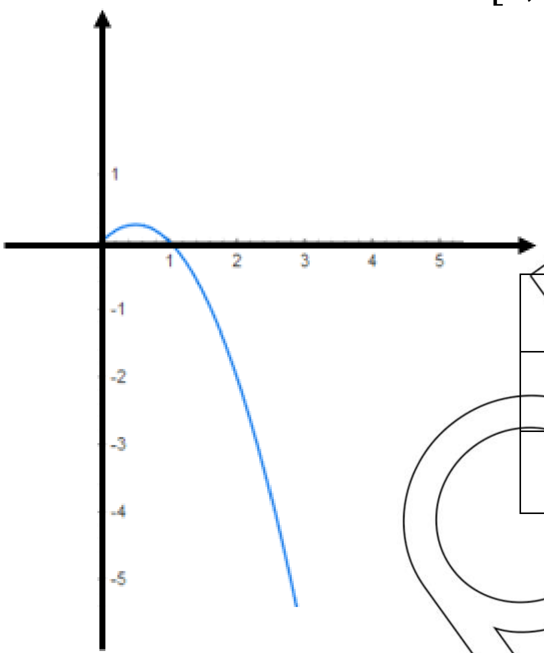
PLUS LIBRARY

قامنا بهذه المحاضرة بحل بعض التمارين عن الدوال ذات التغير المحدود

تمارين:

1) بين مع الرسم أن الدالة $f(x) = x - x^2$ ذ.ت.م على $[0,1]$ ثم أوجد $\bigvee_{0}^{5} f$.

الحل: نلاحظ أن الدالة $f_1(x) = x$ متزايدة على $[0,1]$ حيث أن $f_1'(x) = 1 > 0$
نلاحظ أن الدالة $f_2(x) = x^2$ متزايدة على $[0,1]$ حيث أن $f_1'(x) = 2x > 0$ حيث $x \in [0,1]$
وبالتالي f تمثل فرق دالتين متزايدتين على $[0,1]$ فهي د.ت.م على $[0,1]$.
طريقة ثانية:$f_1(x) = x$ دالة متزايدة على المجال $[0,1]$ فهي د.ت.م
ومربعها دالة تغير محدود وفرق دالتين تغير محدود دالة تغير محدود
ومنه f د.ت.م



$$f'(x) = 1 - 2x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		5
$f'(x)$		$+$	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	-20

$$\bigvee_{0}^{5} f = \bigvee_{0}^{\frac{1}{2}} f + \bigvee_{\frac{1}{2}}^{5} f = \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right| + \left|f(5) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4} - 0\right| + \left|-20 - \frac{1}{4}\right| = \frac{41}{2} < \infty$$

$\Leftarrow f$ د.ت.م على $[0,5]$

2) بين أن الدالة $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ ذ.ت.م على $[2,\infty[$ ثم أوجد $\bigvee_{2}^{\infty} f$.

الحل:

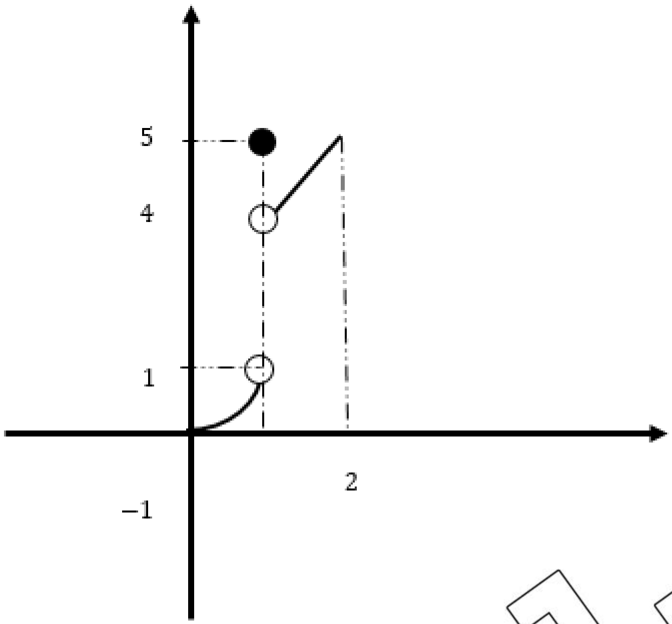
$$f'(x) = -\frac{2(x+1)}{(x+1)^4} = -\frac{2}{(x+1)^3} < 0\,; x \in [2,+\infty]$$

الدالة متناقصة فهي د.ت.م على $[0,\infty]$ أما التغير الكلي:

$$\bigvee_{2}^{\infty} f = \lim_{A\to\infty} \bigvee_{2}^{A} f = \lim_{A\to\infty} |(f(A) - f(2)| = \lim_{A\to\infty} \left|\frac{1}{(A+1)^2} - \frac{1}{9}\right| = \frac{1}{9}$$

3) أوجد التغير الكلي للدالة f على $[0,2]$ المعرفة كما يلي: مع الرسم

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^2 & ; 0 \le x < 1 \\ 5 & ; x = 1 \\ x+3 & ; 1 < x \le 2 \end{cases}}$$



للسهولة نكتب:

$$\bigvee_0^2 f = \bigvee_0^1 f + \bigvee_1^2 f$$

$$\bigvee_0^1 f = |f(1) - f(0)|$$

لأن f متزايدة على $[0,1]$

$$= |5 - 0| = 5$$

$$\bigvee_1^2 f = \sup_{P \in \mathbb{P}[1,2]} V(f,P)$$

نأخذ التجزئة:

$$P = \{x_0 = 1 < x_1 < x_2 < \dots .. < x_{(n-1)} < x_n = 2\}$$

$$V(f,P) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$= |x_1 + 3 - 5| + |x_2 + 3 - x_1 - 3| + \cdots + |2 + 3 - x_{n-1} - 3|$$

$$= 2 - x_1 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_{n-2} + 2 - x_{n-1}$$

$$= 2 - 2x_1 + 2 = 4 - 2x_1$$

$$\bigvee_1^2 f = \sup_{P \in \mathbb{P}[1,2]} V(f,P) = \sup_{P \in \mathbb{P}[1,2]} 4 - 2x_1 = 2$$

$$\bigvee_0^2 f = \bigvee_0^1 f + \bigvee_1^2 f = 5 + 2 = 7$$

وظيفة:

1) **أوجد التغير الكلي للدالة f على $[0,2]$ المعرفة كما يلي: مع الرسم**

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^2+2 & ; 0 \le x < 2 \\ 10 & ; x = 2 \\ x-4 & ; 2 < x \le 4 \end{cases}}$$

2) أثبت أن الدالة $f(x) = [x]$ ذ.ت.م على $[-3,3]$ مع الرسم واحسب: $\int_{-3}^{3} f$

الدالة $[x]$ تدعى بدالة الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x {أكبر عدد صحيح لا يتجاوز x}

$$n \le x < n+1 \Rightarrow [x] = n$$

$$0 \le x < 1 \Rightarrow [x] = 0$$

$$1 \le x < 2 \Rightarrow [x] = 1$$

$$2 \le x < 3 \Rightarrow [x] = 2$$

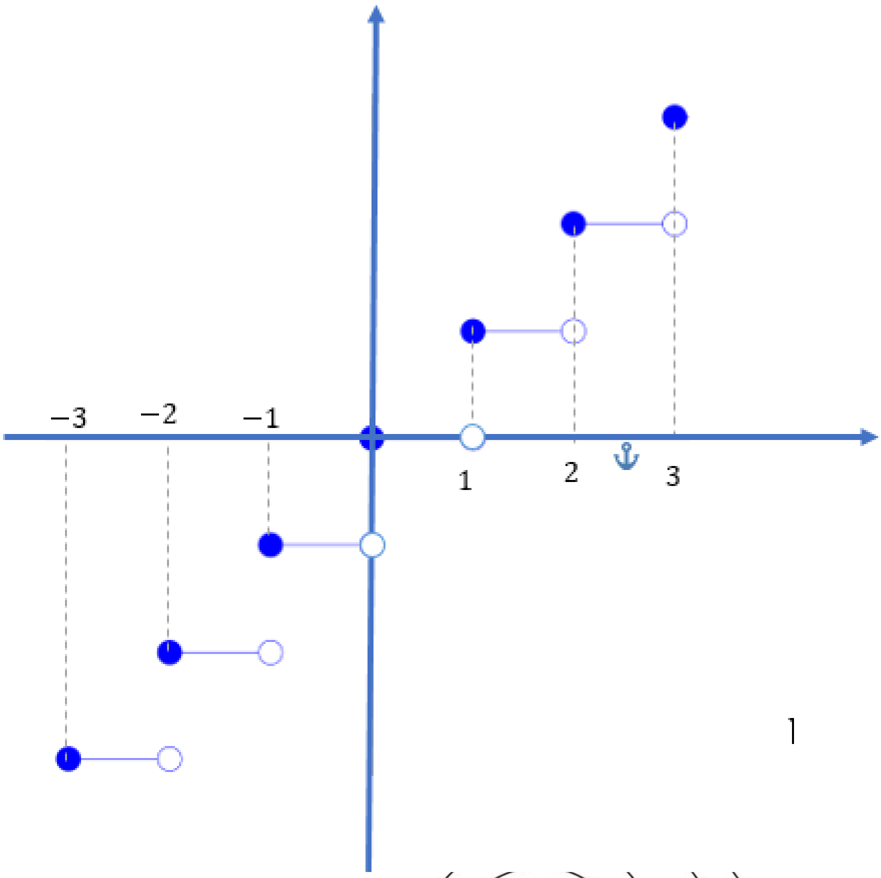
$$x = 3 \Rightarrow [x] = 3$$

$$-1 \le x < 0 \Rightarrow [x] = -1$$

$$-2 \le x < -1 \Rightarrow [x] = -2$$

$$-3 \le x < -2 \Rightarrow [x] = -3$$

$$[x] = \begin{cases} -3 & ; -3 \le x < -2 \\ -2 & ; -2 \le x < -1 \\ -1 & ; -1 \le x < 0 \\ 0 & ; 0 \le x < 1 \\ 1 & ; 1 \le x < 2 \\ 2 & ; 2 \le x < 3 \\ 3 & ; x = 3 \end{cases}$$



3) أثبت أن الدالة $g(x) = x - [x]$ ذ.ت.م على $[0,4]$ مع الرسم واحسب: $\int_{-2}^{2} g$

انتهت المحاضرة

Math Mad Team

إعداد: عبد الرحمن خادم الجامع، سمير الحاج علي.